IV. ALEXANDRE, ALEXANDRIE

Le roi Philippe de Macédoine avait forgé à son fils Alexandre un joujou extraordinaire : la phalange macédonienne, armée novatrice de guerriers serrés en rangs les uns contre les autres armés de longues sarisses, les pointes de celles du cinquième rang dépassant encore le premier rang… Quand Philippe meurt, Alexandre ne tarde pas à se servir de ses soldats. En dix ans, il va bouleverser le Proche Orient, écrasant les Perses, puis s'engageant dans une extraordinaire aventure, allant jusqu'en Afghanistan sans réussir à le pacifier (déjà !), atteignant les royaumes du bord de l'Indus (voir Arrien, *Histoire d'Alexandre*, Éditions de minuit, 1984). Alexandre avait le génie de la création de villes (portant son nom). C'est ainsi qu'en janvier – 331, lors d'une opération éclair en Égypte, il fonde Alexandrie. Quand il meurt, en – 323, son empire est partagé entre ses généraux.

L'un d'eux, Ptolémée reçoit l'Égypte ; il lui faut du temps pour s'imposer et prendre le pouvoir ; il fait venir du monde grec de nombreux savants et artistes. Pour les accueillir et leur permettre de travailler ensemble, il fonde le *Musée* ; pour leur documentation, il fonde la *Bibliothèque*. Rapidement, sont réunies des collections de plusieurs centaines de milliers de textes écrits sur de longues bandes (les *volumen*, de plusieurs mètres parfois) faites de papyrus (d'où le mot papier), roulées sur elles-mêmes et qui devaient être complètement déroulées pour en lire la fin, inconvénient que nos livres n'ont pas.

C'est dans ce contexte exceptionnel qu'a été conçu un ouvrage qui ne l'est pas moins, les *Éléments* d'Euclide.

V. LES *ÉLÉMENTS* D'EUCLIDE

D'Euclide, nous ne savons rien. Il aurait travaillé à Alexandrie. Quand ? Difficile de le dire. Les experts proposent entre – 300 et – 270 sans qu'aucune source permette de préciser plus.

Les manuscrits complets des *Éléments* qui ont été conservés ont été copiés plus de 1000 ans après Euclide sur des copies

de copies, etc. On n'a longtemps connu que des manuscrits descendants d'une édition des *Éléments* réalisée à la fin des années 300 par Théon d'Alexandrie (335-405), père de la seule mathématicienne connue de l'Antiquité, Hypathie (370-415) (morte assassinée, probablement par une secte de chrétiens fanatiques). En 1808, le bibliothécaire de l'École polytechnique, François Peyrard (1760-1822), découvrit parmi tous les documents du Vatican rapportés par Monge, un parchemin du dixième siècle, le codex 190, copié sur une version des *Éléments* antérieure à celle de Théon et en différant par endroits. On doit à Johan Heiberg (1854-1928), dans les années 1880, une édition critique des *Éléments*, s'appuyant sur de nombreux manuscrits dont le codex 190. On peut lire la traduction française de cette édition par Bernard Vitrac : Euclide d'Alexandrie, Les *Éléments*, 4 vol., 1990-2002, PUF, qui l'a considérablement enrichie de notes, commentaires et notices, avec une belle introduction de Maurice Caveing. C'est à elle que nous renvoyons les lectrices et lecteurs désirant mieux connaître les *Éléments*.

Pendant plus de 2000 ans, les *Éléments* ont été la base de la formation des mathématiciens du monde occidental. Le livre qui a été le plus publié depuis l'invention de l'imprimerie est la Bible, bien sûr ; mais le second, loin derrière tout de même, ce sont les *Éléments* d'Euclide.

Les *Éléments* comportent 13 livres. Les livres I à IV traitent de géométrie plane, les livres V et VI de la théorie des proportions, les livres VII à IX d'arithmétique, le livre X, aux dimensions imposantes, traite de problèmes d'irrationnalité, les livres XI à XIII de géométrie dans l'espace.

La première chose qui frappe en ouvrant les *Éléments*, c'est le langage et le style d'exposition, très proche du nôtre : des énoncés et des démonstrations.

Euclide commence par donner ses définitions de point (*ce dont il n'y a aucune partie*), ligne droite (*celle qui est placé de manière égale par rapport aux points qui sont sur elle*), angle, angle aigu, cercle, diamètre, triangles isocèles, carré, etc. Les droites parallèles sont des droites *qui, étant dans le même plan … ne se rencontrent pas…* On remarquera l'imprécision de la

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

définition du point, l'obscurité de la définition de la droite, mais il faudrait les discuter dans le contexte de l'époque.

Euclide formule ensuite cinq demandes (ou axiomes) comme :

> 1) mener une ligne droite de tout point à tout point ;
> 3) construire un cercle de centre donné et de rayon donné ;
> 5) si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites, indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits.

La demande 5 est ce qu'on appelle souvent le cinquième postulat, mais qu'on énonce aujourd'hui sous la forme (équivalente) : *par un point extérieur à une droite, on ne peut mener qu'une parallèle à cette droite* ; elle signifie que, si les angles en E et F marqués sur la figure 2.1 ont une somme plus petite que deux droits, les droites (AB) et (CD) vont se rencontrer du côté de B et D. On remarquera que l'infini y est invoqué : Euclide et ceux qui l'ont suivi auraient dû se méfier !

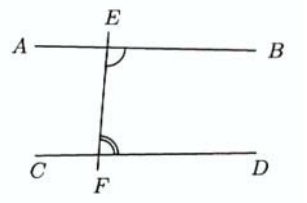

Fig. 2.1 – Postulat d'Euclide

Vous connaissez sans doute les efforts des mathématiciens durant des siècles pour chercher, en vain, à donner une démonstration de ce cinquième postulat : avec un système d'axiomes incomplet et une définition de la droite qui n'en est pas une, ce n'est, avec le recul, pas étonnant.

En fait, les demandes d'Euclide sont en nombre très insuffisant et beaucoup sont implicites, ce qui n'enlève rien à la grandeur des *Éléments*. Il faudra attendre Hilbert pour avoir une axiomatique complète de la géométrie.

Le livre I donne des propositions de géométrie élémentaire que nous apprenons tous au collège : partage d'un angle en

deux, cas d'égalité des triangles, construction de la perpendiculaire à une droite donnée par un point donné, etc. La proposition 47 et dernière du livre I est le fameux théorème que nous appelons théorème de Pythagore. Le livre IV culmine dans la construction du pentagone régulier inscrit dans un cercle.

Le sujet du livre V est la théorie des proportions ; on dit aussi que c'est la *mesure des grandeurs*, le mot *grandeur*, qu'Euclide ne définit pas, se référant implicitement à des grandeurs de différentes espèces (notion également non définie) : segments de droite, aires, volumes, angles… Les grandeurs de même espèce peuvent être comparées, ajoutées. Deux grandeurs A et B de même espèce ont un rapport ($\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$) si des multiples de la première dépassent des multiples de la seconde et des multiples de la seconde dépassent des multiples de la première. En ce sens, le côté a d'un carré et sa diagonale $a\sqrt{2}$ ont un rapport puisque $a < a\sqrt{2} < 2a$.

La superbe définition 5 (qui remonterait donc à Eudoxe et a lointainement inspiré à Richard Dedekind sa construction des réels par les coupures en 1858) définit l'égalité de rapports : A et B ont le même rapport que C et D, si pour tous entiers m et n :

- $mA < nB$ équivaut à $mC < nD$;
- $mA = nB$ équivaut à $mC = nD$;
- $mA > nB$ équivaut à $mC > nD$.

Euclide n'a cependant parcouru qu'une partie du chemin : il définit les rapports irrationnels, mais ce sont des objets isolés et il n'en fait presque rien car il ne définit pas comment faire la somme ou le produit de deux rapports. Cela limite considérablement la portée du livre V. Tous ceux qui font des calculs n'auront pas besoin de cette admirable construction théorique et pourront continuer à calculer comme ils en avaient l'habitude. La proposition 2 du livre VI montre notre théorème de Thalès français, espagnol, etc.

L'arithmétique occupe les trois livres suivants des *Éléments*. La définition 23 est celle de nombre *parfait*, nombre égal à la somme de ses diviseurs (autres que lui-même), comme 6 et 28. Les deux premières propositions du livre VII donnent ce

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

que nous appelons l'*algorithme d'Euclide* ; elles permettent de calculer le pgcd de deux nombres par soustractions successives (nous ferions des divisions euclidiennes). La démonstration de la proposition 31 : *Tout nombre composé est mesuré par un certain nombre premier*, fait appel à l'infini d'une manière explicite pour justifier que, parmi les diviseurs d'un nombre A, existe nécessairement un nombre premier : *s'il ne s'en trouvait pas, des nombres en quantité illimitée mesureraient le nombre A dont chacun serait plus petit que le précédent, ce qui est impossible dans les nombres.*

La proposition 20 du livre IX est remarquable. Elle affirme qu'il y a une infinité de nombres premiers sous la forme suivante : *Les nombres premiers sont plus nombreux que toute multitude de nombres premiers proposée.* Certain(e)s refuseront la démonstration d'Euclide : elle commence par *Soient les nombres premiers proposés* A, B, C. *Je dis que les nombres premiers sont plus nombreux que* A, B, C. Pourquoi donc ne raisonner qu'avec trois nombres ? La suite donne l'argument que nous connaissons : le nombre $ABC + 1$ a un diviseur premier et ce diviseur n'est ni A, ni B, ni C. On remarque qu'Euclide parle de l'infini comme Aristote : les nombres premiers ne sont pas une infinité en *acte*, mais sont plus nombreux que tout nombre donné ; c'est une infinité en *puissance*.

Le livre XII nous fait entrer dans un nouveau monde. Euclide montre que le rapport des aires de deux cercles C et C' est égal au carré du rapport de leurs diamètres $\frac{d^2}{d'^2}$ en utilisant des polygones réguliers de 2^n côtés inscrits et circonscrits aux cercles. Il s'agit du premier raisonnement mettant en œuvre des éléments de calcul intégral. Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667) soulignera le côté universel de cette méthode de raisonnement, de ce travail d'exhaustion (*totum exhaustionis negotium*), en 1648, et le nom de *méthode d'exhaustion* lui est resté depuis.

Le corollaire de la proposition 7 établit que le volume d'une pyramide triangulaire est le tiers de la base par la hauteur, formule découverte par Démocrite (vers – 460 à – 370) et démontrée par Eudoxe. De nouveau, il s'agit d'un raisonnement annonciateur du calcul intégral (l'histoire des différentes

démonstrations de la formule donnant le volume des pyramides triangulaires est racontée par Michèle Grégoire, *Histoires de pyramides*, Mnémosyne, IREM, Paris VII, 1993).

Le livre XIII se termine en beauté par l'étude des polyèdres réguliers convexes.

VI. ÉRATOSTHÈNE (– 276 À – 194)

Ératosthène naît, à Cyrène dans la Lybie actuelle. Nous connaissons par Nicomède son *crible* pour déterminer de proche en proche les nombres premiers : on écrit tous les nombres entiers, de 2 à 1000 par exemple, à la suite. Le premier nombre écrit : 2, est premier ; les multiples de 2 strictement supérieurs à 2 ne sont donc pas premiers et on les barre ; le premier nombre non barré : 3, est premier ; les multiples de 3 strictement supérieurs à 3 ne sont donc pas premiers et on les barre ; le premier nombre non barré : 5, est premier, etc.

Ératosthène est surtout connu pour avoir donné une très bonne estimation des dimensions de la terre (pour cette mesure, voir Pascal Quinton, Activités mathématiques à propos de la mesure de la terre, in **[ACT-13]**). Que la terre soit sphérique est bien établi depuis plus d'un siècle dans le monde grec. Ératosthène sait qu'Alexandrie et Assouan (Syène dans les textes grecs) sont sur le même méridien. Il sait aussi qu'à Syène, à midi au solstice d'été, les objets n'ont pas d'ombre et qu'on voit le soleil du fond des puits ; le soleil est donc à la verticale de Syène. Pour comprendre la situation, traçons la section de la terre par le plan diamétral passant par les pôles, par Alexandrie, notée A, et par Syène, notée B. Le soleil, noté S, est suffisamment loin de la terre pour qu'on puisse supposer que les rayons que nous représentons arrivant en A et en B soient parallèles.

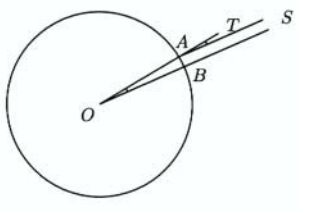

Fig. 2.2 – La mesure d'Ératosthène

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.